2018/5/16 — المحاضرة 17 . والأخيرة -

تمرين :

$X = \{a, b, c, d\}$

$A = \{a, b\}$; $B = \{a, c\}$

عين أصغر طبولوجيا على X بحيث تكون المجموعات A, B مفتوحتين

الحل :

- $\tau = \{\phi, A, B, \{a, b, c\}, X\}$

وهي أصغر طبولوجيا تجعل A, B مفتوحتان

" من التعريف : الطبولوجيا هي أسرة المجموعات المفتوحة "

- المجموعات المغلقة ، متممات المجموعات المفتوحة :

$\{\phi, \{c, d\}; \{b, d\}, \{b, c, d\}, \{d\}, X\}$

- هل الفضاء متراص ؟

نعم (لأن عدد مجموعاته المفتوحة منتهية)

- هل هو مترابط ؟

نعم (لأن المجموعات المفتوحة المغلقة في آن واحد هما فقط ϕ, X)

- هل هو T_0 فضاء ؟

الفضاء (X, τ)

نعم لأنه يوجد على الأقل مفتوح يحوي واحد فقط ... لكن النقطتين a, b

- ولكنه ليس T_1 فضاء

لأنه كما نلاحظ أن لـ d جوار واحد هو X ، وبالتالي أي جوار لـ d يحوي a أو b أو c

• لو سألتكن سؤال خبيث
لو أخذنا المجموعة $\Delta = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$

هل المجموعة Δ مغلقة ؟ بفضاء الجداء $X \times X$

الجواب:

كلا

لأنه : الشرط اللازم والكافي حتى يكون الفضاء هو أنه يكون فضاء هاوسدورف T_2 أن تكون المجموعة Δ مغلقة في فضاء الجداء والفضاء المعطى ليس بـ T_2 فضاء (لأنه ليس T_1 فضاء)

$\Leftarrow$ Δ غير مغلقة.

* لنأخذ $A = \{a,b\}$ طلب الخاصية ؟

• $A^\circ = A$ (الداخلية) لأنها مفتوحة

" داخل المفتوح = نفسه "

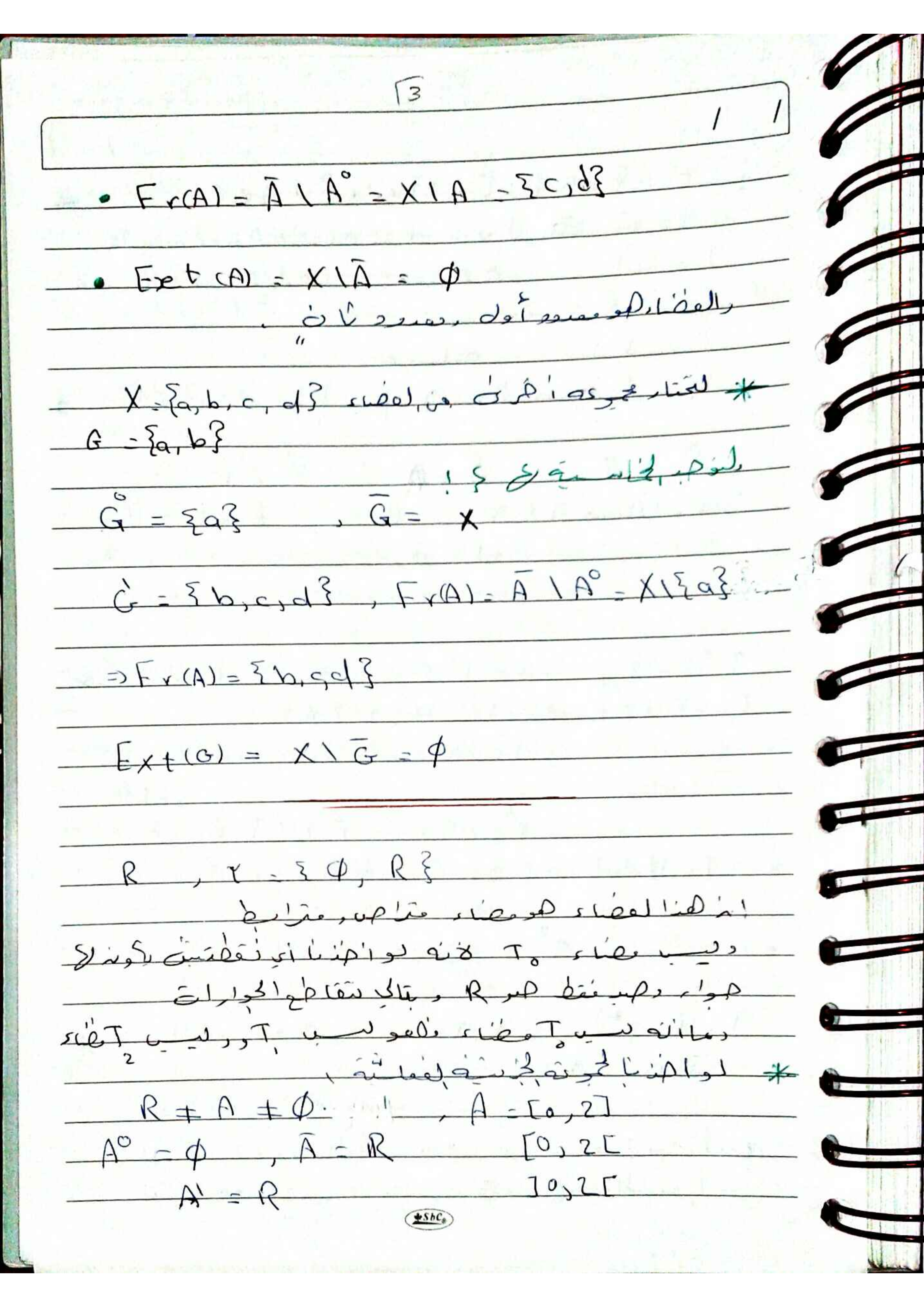
• $\bar{A} = X$ (اللاصقة) " أصغر مجموعة مغلقة تحوي A "

• هل المجموعة A كثيفة؟
نعم لأن لاصقتها = الفضاء X

طريقة أخرى:
نلاحظ أن المجموعة A تتقاطع مع جميع المجموعات الجزئية غير الخالية

• $A' = \{b, c, d\}$ (المشتقة) ; $X = \bar{A} = A' \cup A$

جوارات b هي: X , $\{a,b,d\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b\}$



/ /

- $Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = X \setminus A = \{c, d\}$

- $Ext(A) = X \setminus \bar{A} = \phi$

الفضاء هو معدود أول ، معدود ثاني .

* لنختار مجموعة أخرى من الفضاء $X = \{a, b, c, d\}$

$G = \{a, b\}$

لنوجد الخاصية ع ؟ !

$\mathring{G} = \{a\}$, $\bar{G} = X$

$G' = \{b, c, d\}$, $Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = X \setminus \{a\}$

$\Rightarrow Fr(A) = \{b, c, d\}$

$Ext(G) = X \setminus \bar{G} = \phi$

$\mathbb{R}$, $\tau = \{\phi, \mathbb{R}\}$

إن هذا الفضاء هو فضاء متراص ، مترابط

وليس فضاء T_0 لأنه لو أخذنا أي نقطتين تكونان

جوار ، وليس نقطة في $\mathbb{R}$ ، وبالتالي تتقاطع الجوارات

وبالتالي ليس T_0 فضاء فهو ليس T_1 وليس T_2 فضاء

* لو أخذنا مجموعة جزئية منه ،

$\mathbb{R} \neq A \neq \phi$, $A = [0, 2]$

$A^{o} = \phi$, $\bar{A} = \mathbb{R}$ $[0, 2[$

$A' = \mathbb{R}$ $]0, 2[$

/ /

مثال (رابع) $\tau = \{U \subseteq R : [0,1] \subseteq U\} \cup \{\phi\}$ *

المجموعات المفتوحة هي أي مجموعة تحوي المجموعة $[0,1]$

لاحظ أن عناصر التبولوجيا ، مفتوحة $[0,1]$

" $[0,2]$

غير " $[0,\frac{1}{2}]$

* ولنأخذ المجموعة $A = [0,\frac{1}{2}]$ ، الحاسبة لها ؟

$A^\circ = \phi$, $\bar{A} = R$, $A' = R$

$Fr(A) = \bar{A} \setminus A^\circ = R$, $Ext = \phi$

والمجموعة A ليست مفتوحة ولا مغلقة

وهي كثيفة لأن لصاقها = الفضاء

* هل يمكن مقارنة بين τ^*, τ ؟ $\tau^* = \tau_d$

$\tau = \{U \subseteq R : [0,1] \subseteq U\} \cup \{\phi\}$

هل احداهما أقوى أو أنعم من الأخرى ؟

الحل :

ان المجموعة $[-1,3]$ غير مفتوحة في τ^*

بينما هي مفتوحة في τ (لأنها تحوي المجال $[0,1]$)

والمجموعة $]2,3[$ مفتوحة في τ^*

بينما غير مفتوحة في τ

* هل التطبيق المطابق $(R,\tau) \to (R,\tau^*)$, I

$I(x) = x$

هل التطبيق مستمر ؟

لا لأن الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة في المنطلق

ليست بالضرورة أن تكون مفتوحة في المستقر

توبولوجيا

5

/ /

بين أن المجموعة المفتوحة في المنطقة هي مفتوحة بالمتمم إذا كان التطبيق مستمر.

$$\tau = \{ U \subseteq \mathbb{R} : [0,1] \subseteq U \} \cup \{\phi\}$$ *

$$A = [0, \tfrac{1}{2}]$$

$$\tau_A = \{ U \cap A : U \in \tau \}$$

أوجد التوبولوجيا النسبية

هي التوبولوجيا المصغرة على A ← $\tau = \{\phi, A\}$

أسئلة عن المقرر التالي:

- هل ... جلستين بالكثير »
- برهن ... مبرهنات ... الشرط اللازم والكافي ⟺ «
- ... الخاصية (أساسي) ... مهم
- هل أنه ... أي مجموعة هي مجموعة مغلقة ؟ (المغلقة) $\overline{F} \overset{?}{=} Fr(A)$
- ... هي أكبر ... محتواة ... ؟
- ... أي جميع ... المفتوحة ...
- هل ... اللصاقة هي أصغر مجموعة مغلقة ؟
- ... جميع ... المغلقة ...
- هل الفضاء ... ؟
- هل هو T_0 أو T_1 أو T_2 فضاء ؟

والبرهان ... الدكتور ... كل ... أنه ... فقط ... الشرط ... الكافي ... فقط

انتباه للدقة في الكلام ... كل ... أو ...

توبولوجيا (2)   / /

س ٤م سؤال من الكتاب (مهم جدا)

$\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية مع أسر المجموعات التي تحقق:

$G \in \tau \wedge x \in G \Rightarrow -x \in G$

(أ) أوجد المجموعات المغلقة $A = \{-2, 2, 3, 4, -4\}$

(ب) أوجد $A^\circ, \bar{A}, A', F_r(A), Ext(A)$

الحل:

1) المجموعات المغلقة: ~~$\{-2,2\}, \{-1,1\}$~~ , ...

~~$]-2,2[, [-2,2], \{0\}$~~ $A = \{-2, 2, 3, 4, -4\}$

$-1 \quad 0 \quad 1$

$A = [-1, 1]$, $R \setminus A$

هذا الفضاء مغلق انه فيه المجموعات المفتوحة هي نفسها المغلقة

وجميع مجموعاته لا هي مفتوحة ولا مغلقة

لا تكون لا تحوي ٥ -

2) الداخلية أكبر مجموعة مفتوحة تحتوى عليها

$A^\circ = \{-2, 2, -4, 4\}$

اللصاقة أصغر مجموعة مغلقة تحتوى عليها

$\bar{A} = \{-2, 2, -3, 3, -4, 4\}$

المشتقة: هي جوار A من A

أي مجموعة تحتوي 2، -2، 3

$A' = [-4, 4]$

النقص العامه ؟ 17

الأصيحة